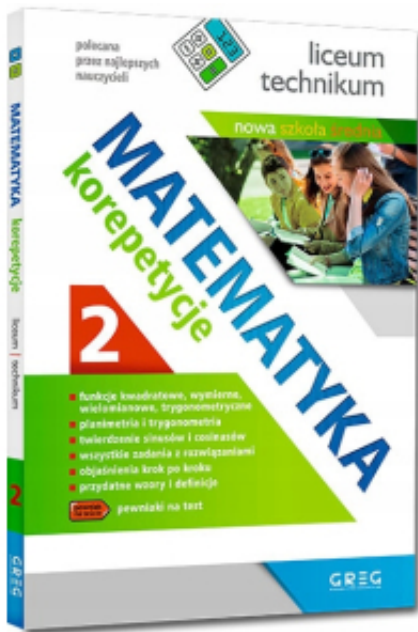


Link do produktu: <https://silesiabook.pl/matematyka-korepetycje-liceum-cz-2-po-reformie-p-721.html>



MATEMATYKA korepetycje liceum cz. 2 PO REFORMIE

Cena	14,99 zł
Klasa	2
Przedmiot	Matematyka
Rodzaj	kompedium, repetytorium, opracowanie
Waga produktu z opakowaniem jednostkowym	0.215
Seria	Matematyka korepetycje
Wysokość produktu	23.5
Szerokość produktu	16.5
Numer wydania	1
Liczba stron	138
Język publikacji	polski
Rok wydania	2022
Nośnik	książka papierowa
Autor	Praca zbiorowa
Okładka	miękka
Tytuł	Matematyka korepetycje Część 2
Wydawnictwo	Wydawnictwo Greg
ISBN	9788375179385

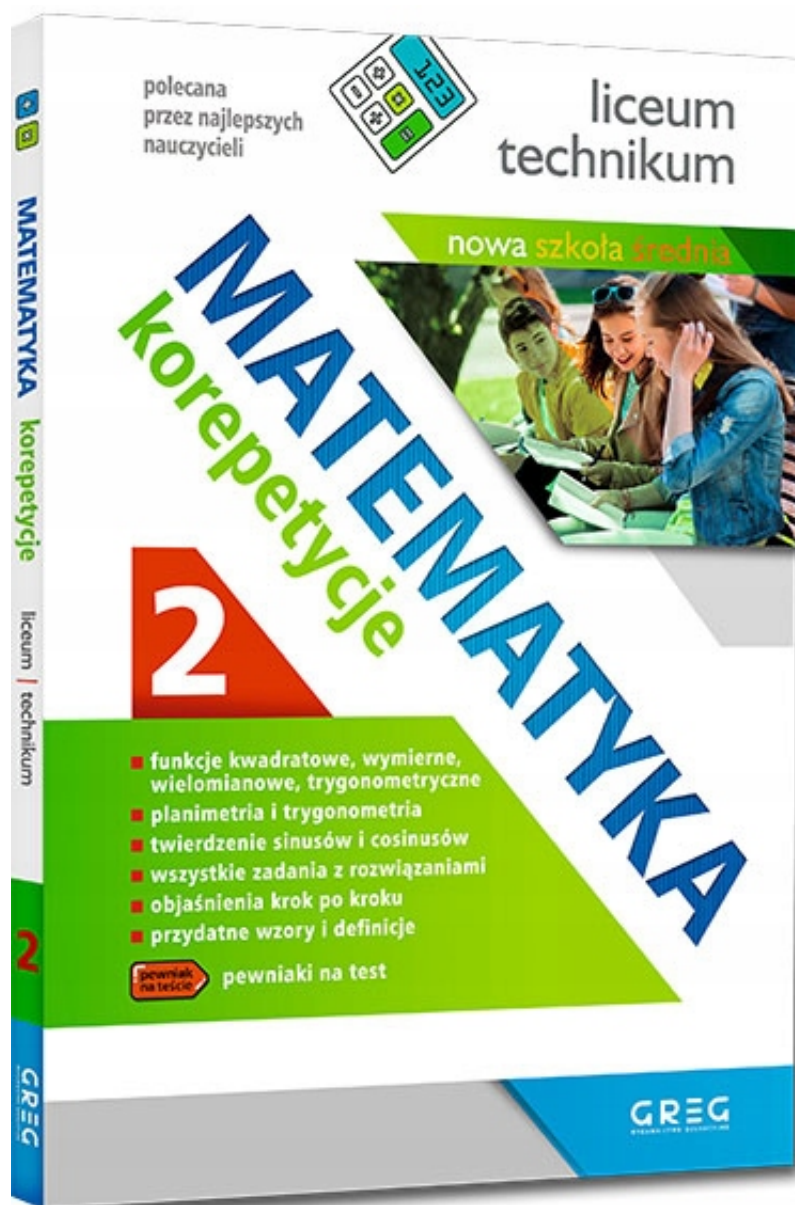
Opis produktu

Matematyka - korepetycje - liceum, część 2 - PO REFORMIE

zgodna z nową podstawą programową

szkoła: liceum/technikum

- ISBN: 978-83-7517-938-5
- rok wydania: 2022
- autor: Grażyna Kiełczykowska
- liczba stron: 140
- typ oprawy: oprawa miękka
- format: 165 x 235 mm
- waga: 240 g
- stan NOWA



Korepetycje matematyka - liceum, część 2 to kolejna część świetnej serii do samodzielnej nauki matematyki na poziomie licealnym.

Książka jest **zgodna z najnowszą podstawą programową** i zawiera wszystkie wymagane zagadnienia w klasie drugiej liceum - zarówno teorię, wzory, jak i zadania w typie egzaminacyjnym. Ucząc się z **Korepetycji** uczeń rozwiązuje **typy zadań, jakie pojawiają się na sprawdzianach, testach, a później na maturze**. Zadania te wskazuje specjalny znaczek „pewniak na testy”.

Każde zadanie zostało rozwiązane krok po kroku, a każdy etap dokładnie objaśniony w komentarzach do zadania. Dzięki temu rozwiązaniu nawet najtrudniejsze zadanie można prześledzić i zrozumieć - **bez kosztownych korepetycji**.

Polecamy!

polecana przez najlepszych nauczycieli

język matematyki

liczby rzeczywiste

wyrażenia algebraiczne

równania i nierówności

funkcje, planimetria

objaśnienia krok po kroku

wszystkie zadania z rozwiązaniami

pewniaki na test

spis treści

ROZDZIAŁ I. FUNKCJA KWADRATOWA

- Postać ogólna, iloczynowa i kanoniczna funkcji kwadratowej
- Wartość największa i najmniejsza funkcji kwadratowej
- Równania kwadratowe
- Nierówności kwadratowe
- Układy równań

ROZDZIAŁ II. PLANIMETRIA

- Czworokąty
- Koło i okrągKąty w koleWzajemne położenie prostej i okręguWzajemne położenie dwóch okręgówOkrąg opisany na trójkącieOkrąg wpisany w trójkąt

ROZDZIAŁ III. WIELOMIANY

- Informacje o wielomianach
- Działania na wielomianach, równość wielomianów
- Rozkład wielomianu na czynniki
- Dzielenie wielomianów, twierdzenie Bézouta
- Równania wielomianowe

ROZDZIAŁ IV. FUNKCJA WYMIERNA

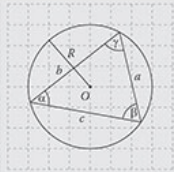
- Wyrażenia wymierne
- Funkcja odwrotnie proporcjonalna
- Zastosowanie funkcji wymiernych

ROZDZIAŁ V. TRYGNOMETRIA

- Funkcje trygonometryczne w trójkącie prostokątnym
- Tożsamości trygonometryczne
- Funkcje trygonometryczne dowolnego kąta
- Twierdzenie sinusów i cosinusów
- Zastosowanie funkcji trygonometrycznych w planimetrii

Jest jeszcze wiele innych wzorów, które mają zastosowanie w trygonometrii. Dalej znajdziesz kilka z nich, podane w postaci twierdzeń.

TWIERDZENIE SINUSÓW I COSINUSÓW



Twierdzenie sinusów brzmi: w dowolnym trójkącie stosunek długości boku do sinusa kąta leżącego naprzeciw tego boku jest równy średnicy koła opisanego na tym trójkącie.

Inaczej (spójrz na rysunek powyżej):

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R, \frac{b}{\sin \beta} = 2R, \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

albo:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

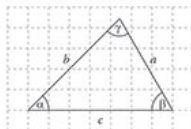
Twierdzenie to służy do tzw. rozwiązywania trójkątów, czyli znajdowania boków i kątów danych trójkątów.

ZADANIE 1

Rozwiąż trójkąt o kątach $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$ i boku $c = 10$.

Rozwiązanie:

Rozwiązać trójkąt to znaczy obliczyć długości wszystkich boków i miary wszystkich kątów.



Do rozwiązania tego zadania wykorzystamy twierdzenie sinusów.

Skoro $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$, to aby obliczyć miarę kąta γ , wystarczy od sumy kątów trójkąta odjąć miary kątów α i β .

$$\gamma = 180^\circ - (45^\circ + 60^\circ) = 180^\circ - 105^\circ = 75^\circ$$

Suma kątów wewnętrznych w trójkącie wynosi 180° .

Teraz obliczmy długość boku a :

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Twierdzenie sinusów.

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 75^\circ}$$

Podzielimy te równości na dwie części:

$$\frac{a}{\sin 45^\circ} = \frac{10}{\sin 75^\circ} \quad \text{i} \quad \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{10}{\sin 75^\circ}$$

Z tabeli odczytujemy wartość $\sin 75^\circ$ i podstawiamy do równania:

$$\frac{a}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{10}{0,9659}$$

	30°	45°	60°
$\sin \alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

Wartość $\sin 45^\circ$ też możemy odczytać z tabeli:

α [°]	$\sin \alpha$	$\cos \beta$	$\tan \alpha$	β [°]
44	0,6947	0,9657	46	
45	0,7071	1,0000	45	

Zatem:

$$\frac{a}{0,7071} = \frac{10}{0,9659}$$

$$a \approx 7,32$$

Analogicznie:

$$\frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{10}{0,9659}$$

$$\frac{b}{0,8660} = \frac{10}{0,9659}$$

stopnie	0°	10°
45	0,7071	0,7092
46	0,7193	0,7214
47	0,7314	0,7333
48	0,7431	0,7451
49	0,7547	0,7566
50	0,7660	0,7679
51	0,7771	0,7790
52	0,7880	0,7898
53	0,7986	0,8004
54	0,8090	0,8107
55	0,8192	0,8208
56	0,8290	0,8307
57	0,8387	0,8403
58	0,8480	0,8496
59	0,8572	0,8587
60	0,8660	0,8675
61	0,8746	0,8760
62	0,8829	0,8843
63	0,8910	0,8923
64	0,8988	0,9001
65	0,9063	0,9075
66	0,9135	0,9147
67	0,9205	0,9216
68	0,9272	0,9283
69	0,9336	0,9346
70	0,9397	0,9407
71	0,9455	0,9465
72	0,9511	0,9520
73	0,9563	0,9572
74	0,9613	0,9621
75	0,9659	0,9667
76	0,9703	0,9710

$$\begin{aligned} W(x) &= (x+1)(x^4 - 2x^2 + 1) = \\ &= (x+1)(x^2 - 1)^2 \\ W(x) &= (x+1)((x-1)(x+1))^2 \\ W(x) &= (x+1)^4(x-1)^2 \end{aligned}$$

W nawiasie mamy wzór skróconego mnożenia $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

W nawiasie mamy wzór skróconego mnożenia $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Wyrażenie $(x+1)$ pojawiło się trzykrotnie, a $(x-1)$ – dwukrotnie.

ZADANIE 3

Rozłóż na czynniki wielomiany:

- $W(x) = (2x^2 + 1) \cdot (x - 3) - (2x^2 + 1) \cdot (2x + 3)$
- $W(x) = 9x^2 - 30x + 25$
- $W(x) = 25x^2 - 9$
- $W(x) = (9x^2 - 6x + 1) - (4x^2 + 4x + 1)$
- $W(x) = 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3$
- $W(x) = 125x^3 - 8$
- $W(x) = 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12$
- $W(x) = x^4 + 2x^3 - x - 2$

Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{Ad a)} \quad W(x) &= (2x^2 + 1) \cdot (x - 3) - (2x^2 + 1) \cdot (2x + 3) = (2x^2 + 1)(x - 3 - (2x + 3)) = \\ &= (2x^2 + 1) \cdot (x - 3 - 2x - 3) = (2x^2 + 1) \cdot (-x - 6) = \\ &= -(2x^2 + 1) \cdot (x + 6) \end{aligned}$$

Wielomian rozkładamy na czynniki metodą wyliczania wspólnego czynnika przed nawias. Wyrażenie w nawiasie redukujemy.

$$\begin{aligned} \text{Ad b)} \quad W(x) &= 9x^2 - 30x + 25 = (3x)^2 - 2 \cdot 3x \cdot 5 + 5^2 = \\ &= (3x - 5)^2 \end{aligned}$$

W takim przypadku na ogół szukamy wzoru skróconego mnożenia.

$$\begin{aligned} \text{Ad c)} \quad W(x) &= 25x^2 - 9 = (5x)^2 - 3^2 = \\ &= (5x + 3) \cdot (5x - 3) \end{aligned}$$

Ten wielomian rozkładamy przy pomocy wzoru skróconego mnożenia na różnicę kwadratów.

$$\begin{aligned} \text{Ad d)} \quad W(x) &= (9x^2 - 6x + 1) - (4x^2 + 4x + 1) = \\ &= (3x - 1)^2 - (2x + 1)^2 = \\ &= [(3x - 1) + (2x + 1)] \cdot [(3x - 1) - (2x + 1)] = \\ &= (3x - 1 + 2x + 1)(3x - 1 - 2x - 1) = \\ &= 5x(x - 2) \end{aligned}$$

W każdym z nawiasów występuje wzór skróconego mnożenia. Najpierw „zawijamy” te wzory, a potem stosujemy kolejny na różnicę kwadratów.

$$\begin{aligned} \text{Ad e)} \quad W(x) &= 1 + 6x + 12x^2 + 8x^3 = \\ &= (1 + 2x)^3 \end{aligned}$$

Ponieważ w wielomianie występują potęgi kolejno od zerowej do trzeciej, próbujemy stosować wzór skróconego mnożenia.

$$\begin{aligned} \text{Ad f)} \quad W(x) &= 125x^3 - 8 = (5x)^3 - 2^3 = \\ &= (5x - 2) \cdot (25x^2 + 10x + 4) \end{aligned}$$

W tym przypadku stosujemy wzór na różnicę sześcianów.

$$\begin{aligned} \text{Ad g)} \quad W(x) &= 9x^3 - 4x^2 - 27x + 12 = \\ &= 9x^3 - 27x - 4x^2 + 12 = \\ &= x^2(9x - 4) - 3(9x - 4) = \\ &= (9x - 4)(x^2 - 3) = \\ &= (9x - 4)(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

Jest to typowy przykład wielomianu, który rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów. Należy zawsze upewnić się, czy wielomian, który pozostał w nawiasie, jest nierozkładalny. Jeśli nie jest, tak jak w tym przypadku, należy go rozłożyć na czynniki.

$$\begin{aligned} \text{Ad h)} \quad W(x) &= x^4 + 2x^3 - x - 2 = \\ &= x^3 \cdot (x + 2) - (x + 2) = \\ &= (x + 2) \cdot (x^3 - 1) = \\ &= (x + 2) \cdot (x - 1) \cdot (x^2 + x + 1) \end{aligned}$$

Wielomian rozkładamy na czynniki metodą grupowania wyrazów.

Stosujemy wzór na sześcian różnicy.

DZIELENIE WIELOMIANÓW, TWIERDZENIE BÉZOUTA

Z wcześniejszych lat nauki matematyki wiemy, że podzielenie liczby a przez liczbę b , różną od zera, polega na znalezieniu takiej liczby c , że $a = c \cdot b$.

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{więc} \quad a = c \cdot b$$

a – dzielna, b – dzielnik, c – iloraz

Dokładnie tak samo jest z wielomianami.

Mówimy, że wielomian W jest podzielny przez wielomian $Q \neq 0$, jeśli istnieje wielomian P taki, że $W = P \cdot Q$.

Dzielenie wielomianów wykonujemy w ten sam sposób, co dzielenie liczb naturalnych:

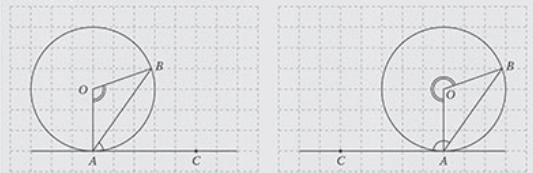
$$\begin{array}{r} 112 \\ 6272 : 56 \\ \underline{-56} \\ 67 \\ \underline{-56} \\ 112 \\ \underline{-112} \\ 0 \end{array}$$

TWIERDZENIE O KĄCIE MIĘDZY STYCZNĄ A CIĘCIWĄ

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB . Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A . Wtedy:

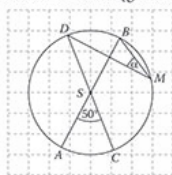
$$|\angle AOB| = 2 \cdot |\angle CAB|$$

Przy czym rozpatrujemy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .



ZADANIE 1

Średnice AB i CD okręgu o środku S przecinają się pod kątem 50° . Oblicz miarę kąta α .



Rozwiązanie:

Zauważ, że kąty ASC i DSB są wierzchołkowe, więc ich miary są równe.

Kąt DSB jest kątem środkowym opartym na tym samym łuku, co kąt wpisany DMB . Z zależności pomiędzy kątem wpisanym a środkowym opartym na tym samym łuku wynika, że:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot 50^\circ = 25^\circ$$

Odp.: Miara kąta α wynosi 25° .

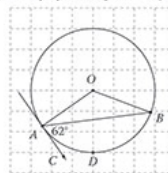
Kąt środkowy jest dwa razy większy od kąta wpisanego opartego na tym samym łuku.

ZADANIE 1

Kąt między cięciwą AB a styczną do okręgu w punkcie A ma miarę $\alpha = 62^\circ$. Oblicz miarę kąta środkowego opartego na łuku $\widehat{ADB}$.

Rozwiązanie:

Poniższy rysunek prezentuje sytuację opisaną w zadaniu.



Aby obliczyć miarę kąta środkowego α , wykorzystamy twierdzenie o kącie między styczną a cięciwą.

Dany jest okrąg o środku w punkcie O i jego cięciwa AB . Prosta AC jest styczna do tego okręgu w punkcie A . Wtedy:

$$|\angle ASB| = 2 \cdot |\angle CAB|$$

Przy czym wybieramy ten z kątów środkowych AOB , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta CAB .

Zatem $\alpha = 2 \cdot 62^\circ = 124^\circ$.

Odp.: Kąt środkowy oparty na łuku $\widehat{ADB}$ ma miarę 124° .

ZADANIE 2

Okrąg o środku w punkcie S ma średnicę równą 10 cm. Odległość cięciwy od środka okręgu wynosi 3 cm. Oblicz długość tej cięciwy.

Rozwiązanie:

Średnica okręgu ma długość 10 cm.

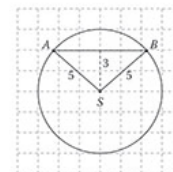
Zatem promień jest dwa razy krótszy,

czyli $10 : 2 = 5$ cm.

Stąd $|SB| = |SA| = 5$ cm.

Odległość cięciwy od środka okręgu to najkrótszy odcinek pomiędzy tą cięciwą a środkiem okręgu. Jest to wysokość trójkąta ABS .

Rozpatrzmy więc trójkąt ASC .



Rozwiązanie:

$$\begin{aligned} \text{Ad a)} \quad & \begin{cases} 2 \cdot 9 + 3b + c = 0 \\ 2 \cdot 1 - b + c = 0 \\ 3b + c = -18 \end{cases} \\ & \begin{cases} c = b - 2 \\ 3b + b - 2 = -18 \\ c = b - 2 \\ 4b = -16 \\ c = b - 2 \\ b = -4 \\ c = -6 \end{cases} \end{aligned}$$

Oczywiście podpunkt a) można było rozwiązać, przekształcając postać iloczynową do postaci ogólnej, czyli wyznaczając te nawiasy.

$$\begin{aligned} \text{Ad b)} \quad f(x) &= 2x^2 - 4x - 6 = 2 \cdot (x^2 - 2x) - 6 = \\ &= 2 \cdot (x^2 - 2x + 1 - 1) - 6 = \\ &= 2 \cdot [(x-1)^2 - 1] - 6 = \\ &= 2(x-1)^2 - 2 - 6 = 2(x-1)^2 - 8 \end{aligned}$$

$$\text{Ad c)} \quad f(x) = 2(x+1) \cdot (x-3)$$

Ponieważ dane liczby są miejscami zerowymi, zatem wartość funkcji dla tych argumentów jest równa zero. Na tej podstawie układamy układ równań i obliczamy wartości szukanych współczynników.

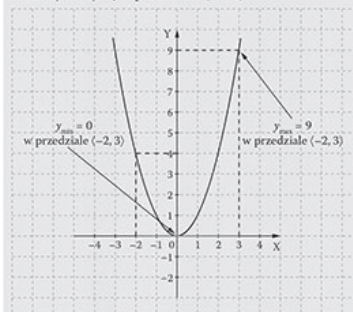
Znajdujemy postać kanoniczną innym sposobem, niż robiliśmy to dotychczas. Sposób polega na uzupełnianiu do wzoru skróconego mnożenia.

Postać iloczynowa. Wystarczy dane w treści zadania miejsca zerowe wstawić do wzoru na postać iloczynową.

WARTOŚĆ NAJWIĘKSZA I NAJMNIEJSZA FUNKCJI KWADRATOWEJ

Aby wyznaczyć największą i najmniejszą wartość funkcji kwadratowej w jakimś przedziale, warto narysować jej wykres.

Niech $f(x) = x^2$. Wykresem jest parabola. Wyznamy jej wartość największą i wartość najmniejszą w przedziale $(-2, 3)$.



Z powyższego rysunku widać, że w przedziale $(-2, 3)$ wartość największa jest dla argumentu $x = 3$ i wynosi 9, a wartość najmniejsza dla $x = 0$ i wynosi 0, czyli jest to wierzchołek paraboli.

Możemy zapisać to następująco:

$$y_{\max} = f(3) = 9$$

$$y_{\min} = f(0) = 0$$